

# L'analizzatore meccanico delle curve oscillanti

Candidato: Valerio Gemmetto

Relatore: prof.ssa Daniela Marocchi

Corelatore: prof.ssa Alberta Marzari Chiesa

# ANALISI CURVE SPERIMENTALI

FORME DEFINITE  
DALLA TEORIA



CALCOLO DEI PARAMETRI  
DELLE FUNZIONI  
RAPPRESENTATIVE

NULLA SI SA DELLA STRUTTURA  
DELLA CURVA IN ESAME



VALUTARE L'ESISTENZA DI  
EVENTUALI "PERIODICITÀ  
NASCOSTE"



PER CHIARIRE  
L'INTERPRETAZIONE DEI  
FENOMENI



PER FARE PREVISIONI  
ED ESTRAPOLAZIONI

Si tratta cioè di analizzare curve oscillanti apparentemente irregolari, ma in realtà costituite da elementi periodici sconosciuti, eventualmente sovrapposti ad un substrato irregolare



## ANALISI PERIODALE

# Francesco Vercelli ( 1883-1952 )

- 1883: nasce il 22 ottobre a Vinchio ( AT )
- 1908: laurea in fisica all'università di Torino
- 1909: laurea in matematica all'università di Torino
- 1915-1918: ufficiale addetto al servizio meteorologico
- 1919: direttore dell'Osservatorio Geofisico di Trieste
- 1944: salvo miracolosamente dal crollo dell'Istituto Geofisico in seguito a bombardamento
- 1952: muore il 24 novembre a Camerano Casasco ( AT )
- 1822: analisi di Fourier
- 1861: nascita dei primi servizi metereologici
- 1910-1930: tentativi di risoluzione delle equazioni descrittive dell'evoluzione delle masse d'aria atmosferiche e della pressione
- Anni '40: realizzazione dei primi calcolatori



OBIETTIVO: data una curva costituita da elementi periodici sconosciuti, determinare tali elementi, senza deformazioni

I grafici che si vogliono analizzare sono costruiti partendo da successioni di valori osservati a intervalli equidistanti, trasformati in linee continue mediante interpolazione; si ha cioè:

$$\dots, Y_{-2}, Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_2, \dots$$

Nulla si sa della durata dei periodi e della persistenza degli eventuali elementi componenti



Si suppone che la curva sperimentale sia costituita da onde componenti tali da poter essere scritta nella forma:

$$y = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_i}(t + \alpha_i)$$

in cui  $T$ ,  $A$ ,  $\alpha$  dei singoli termini siano quantità ignote ma costanti; si esaminano poi le alterazioni che subiscono i risultati quando alcune quantità siano variabili

# Come ricavare gli elementi componenti ?

Si usano combinazioni lineari e simmetriche del tipo:

$$y'_m = 2a_0 y_m + a_1(y_{m-1} + y_{m+1}) + \dots + a_n(y_{m-n} + y_{m+n})$$

che, su

$$y = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha)$$

agiscono così:

$$y' = 2a_0 A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha) + \dots + a_n A \left[ \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t - n + \alpha) + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + n + \alpha) \right]$$



$$y' = 2A(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi}{T}) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha) \Rightarrow y' = My$$

dove

$$M = 2(a_0 + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi}{T})$$

Perciò, la sostituzione precedente trasforma la sinusoide considerata in una sinusoide di uguale periodo e uguale fase, ma con ampiezza moltiplicata per il fattore di amplificazione M.

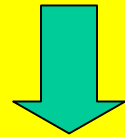
Di conseguenza, su

$$y = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_i}(t + \alpha_i)$$

la combinazione agisce in modo analogo; detti:

$$M_0 = 2(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$$

$$M_i = 2(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_i} + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi}{T_i})$$



$$y' = M_0 A_0 + \sum_{i=1}^m M_i A_i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T_i}(t + \alpha_i)$$

Perciò, anche in questo caso non si hanno deformazioni nei periodi e nelle fasi delle onde componenti, ma le ampiezze risultano moltiplicate per i fattori  $M_i$ , detti FATTORI DI AMPLIFICAZIONE.

# FATTORI DI AMPLIFICAZIONE

Si è trovato:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 = 2(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \\ M_1 = 2(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_1} + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi}{T_1}) \\ \dots \\ M_m = 2(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_m} + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi}{T_m}) \end{array} \right.$$

Si vede dunque come i singoli  $M_i$  siano funzioni dei periodi  $T_i$  e dei coefficienti  $a_0, a_1, \dots$ ; tuttavia, per assegnati valori dei periodi, sono funzioni dei soli coefficienti



Scegliendo opportunamente i valori di questi parametri, si può modificare a volontà l'ampiezza residua delle onde aventi periodi dati



**I FATTORI DI AMPLIFICAZIONE SONO FUNZIONI SELETTIVE**

Misurando perciò i periodi prendendo come unità di misura l'intervallo compreso fra valori consecutivi della successione analizzata, e assegnando valori ai periodi, si ottiene:

$$T = 1 \Rightarrow M_1 = 2(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)$$

$$T = 2 \Rightarrow M_2 = 2(a_0 - a_1 + a_2 - \dots)$$

$$T = 3 \Rightarrow M_3 = 2(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{3} + a_2 \cos \frac{4\pi}{3} + \dots)$$

Poiché i coefficienti  $a_0, a_1, \dots$  sono arbitrari, si può fissarne la scelta con criteri opportuni, con l'obiettivo di rendere nulli i fattori di amplificazione relativi a dati elementi componenti

Per esempio, si può voler eliminare tutte le eventuali onde componenti di periodo inferiore ad un dato valore

Per fare ciò, si impone che siano nulli  $n$  fattori di amplificazione, corrispondenti ai periodi che si vogliono annullare; sia  $n+1$  il numero dei coefficienti



**SISTEMA DI  $n$  EQUAZIONI IN  $n+1$  INCOGNITE**



## ESEMPIO: ANNULLAMENTO DELLE ONDE DI PERIODO MINIMO

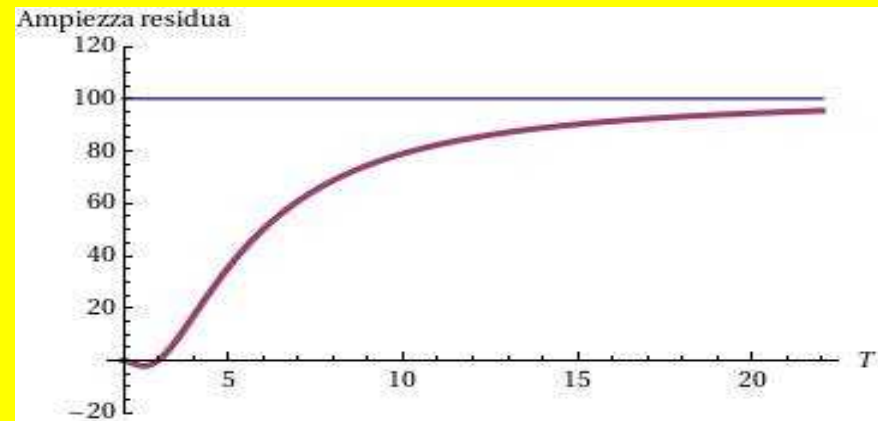
$$\begin{cases} M_2 = 0 \\ M_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a_0 - a_1 + a_2) = 0 \\ 2(a_0 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{6} \\ a_1 = \frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Per tale scelta di coefficienti, la combinazione lineare da applicare risulta essere:

$$y'_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}(y_{-1} + y_1) + \frac{1}{12}(y_{-2} + y_2)$$

La sua applicazione ai punti sperimentali permette di dedurre una curva residua, in cui sono annullate 2 tra le possibili onde componenti, mentre gli altri elementi risultano smorzati nel modo seguente:

$$\begin{cases} M_4 = 0.17 \Rightarrow 17 \% \\ M_5 = 0.39 \Rightarrow 39 \% \\ \dots \\ M_\infty = 1 \Rightarrow 100 \% \end{cases}$$



Seguendo questo metodo, si sono calcolati numerosi schemi, aventi come obiettivo la selezione di onde di periodo diverso; in particolare:

- Selezione di onde brevi;
- Selezione di onde lunghe;
- Perequazione;
- Calcolo dell'asse medio.

## CRITERI PER LA SCELTA DEI COEFFICIENTI

Ricordando che la combinazione lineare da eseguire è:

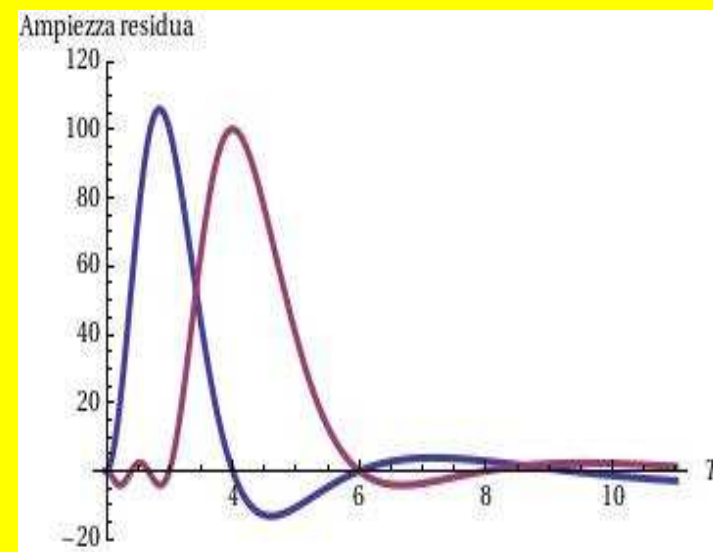
$$y'_m = 2a_0 y_m + a_1 (y_{m-1} + y_{m+1}) + \dots + a_n (y_{m-n} + y_{m+n}) ,$$

tra i possibili schemi, si preferiscono quelli per cui risulta:

- $a_i < a_j$  ,  $i > j$  ;
- $n$  minimo.

| COEFFICIENTI  |                |                 |                 |                |       |                 |       |                | AMPIEZZE RESIDUE |     |     |     |   |
|---------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|-------|-----------------|-------|----------------|------------------|-----|-----|-----|---|
| $2a_0$        | $a_1$          | $a_2$           | $a_3$           | $a_4$          | $a_5$ | $a_6$           | $a_7$ | $a_8$          | 2                | 3   | 4   | 5   | 6 |
| $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{8}$   | $-\frac{1}{20}$ |                |       |                 |       |                | 100              | 22  | 0   |     |   |
| $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{6}$   | $-\frac{1}{8}$ |       | $\frac{1}{24}$  |       |                | 0                | 100 | 0   | -10 | 0 |
| $\frac{1}{6}$ |                | $-\frac{1}{6}$  |                 | $\frac{1}{8}$  |       | $-\frac{1}{12}$ |       | $\frac{1}{24}$ | 0                | 0   | 100 | 39  | 0 |

Nell'immagine, sono raffigurati  
 gli effetti dovuti a due  
 tra i possibili esempi  
 di fattori di amplificazione,  
 in funzione del periodo T



# Verso la costruzione dello strumento

PROBLEMA: ciascuna combinazione lineare doveva essere svolta su ciascun punto sperimentale della successione



Calcoli lunghi e soggetti a errori



Per ovviare a ciò, Francesco Vercelli realizzò uno strumento in grado di risolvere queste difficoltà

# Analizzatore meccanico delle curve oscillanti

- Anno realizzazione: 1939
- Dimensioni:
- Materiale: legno, metallo



Lo strumento è, in sostanza, un insieme di calcolatori analogici indipendenti; rappresenta uno dei primi esempi di macchina da calcolo destinata ad uso scientifico.

Lo strumento svolge le seguenti funzioni:

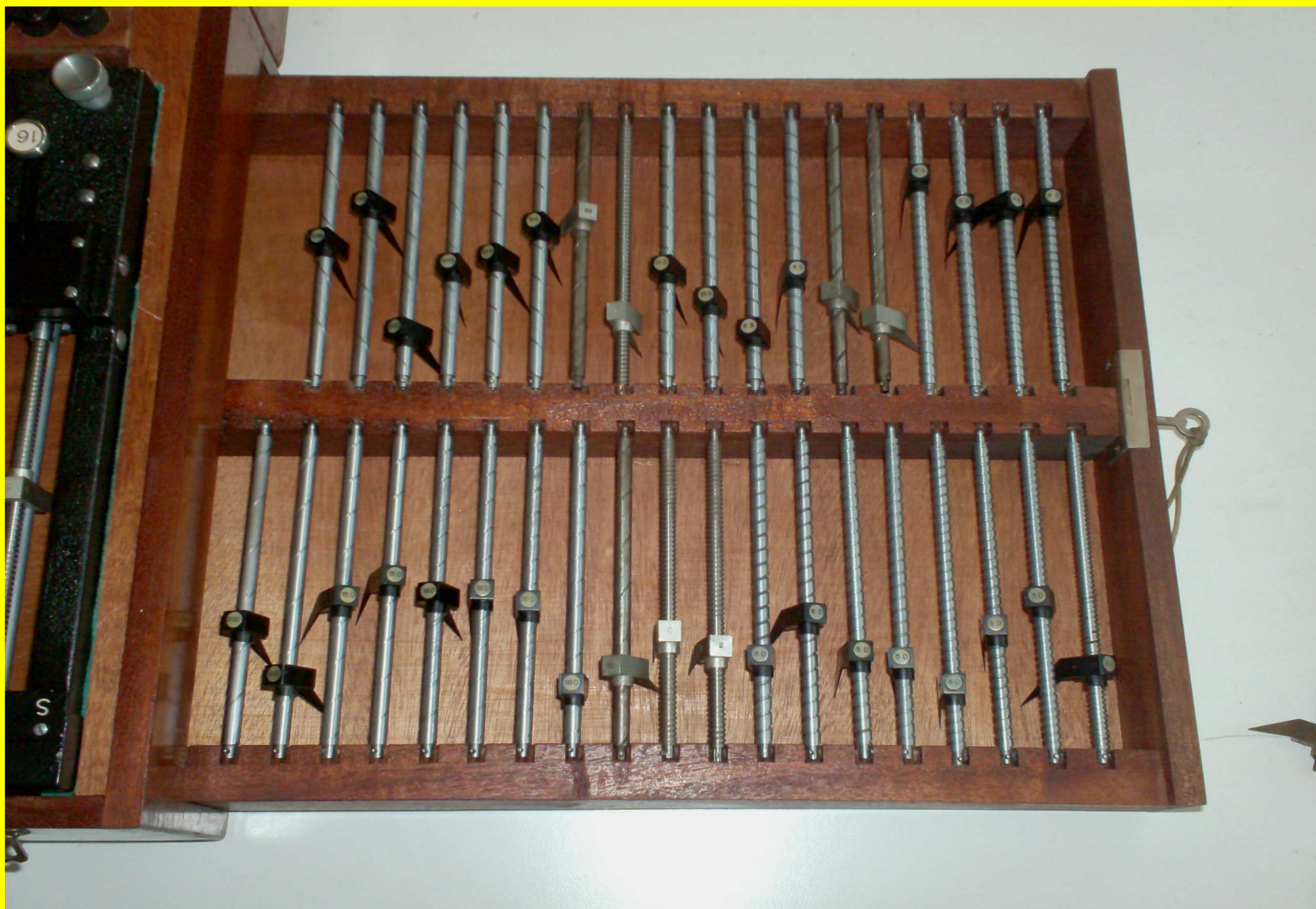
- riduzione delle ordinate della curva secondo rapporti fissati;
- somma algebrica delle ordinate ridotte.



L'analizzatore applica in modo meccanico alla curva le combinazioni lineari prescelte

Lo strumento si basa su:

- ✓ Una dotazione di VITI MULTIPLE; portano inciso:
  - Verso: - destrogire ( in sostituzione dei coefficienti positivi )  
- levogire ( in sostituzione dei coefficienti negativi )
  - Passo m: riduce le ordinate secondo il rapporto  $1/m$
- ✓ Una singola vite di passo unitario



Dotazione di viti multiple; portano incisi sui corsoi verso ( D o S ) e passo

# Principio di funzionamento

- Le viti multiple e quella unitaria sono ingranate in modo da compiere lo stesso numero di giri;
- Ogni vite multipla presenta un corsoio scorrevole nella direzione delle ordinate;
- È possibile variare la posizione di ciascun corsoio manualmente.

La vite multipla fa percorrere al proprio corsoio uno spostamento  $L$



La vite unitaria imprime al proprio corsoio uno spostamento  $L/m$



Ingranando ogni vite multipla con quella unitaria, questa totalizza gli scorrimenti dei singoli corsoi, ridotti ciascuno secondo il rapporto corrispondente al passo della vite

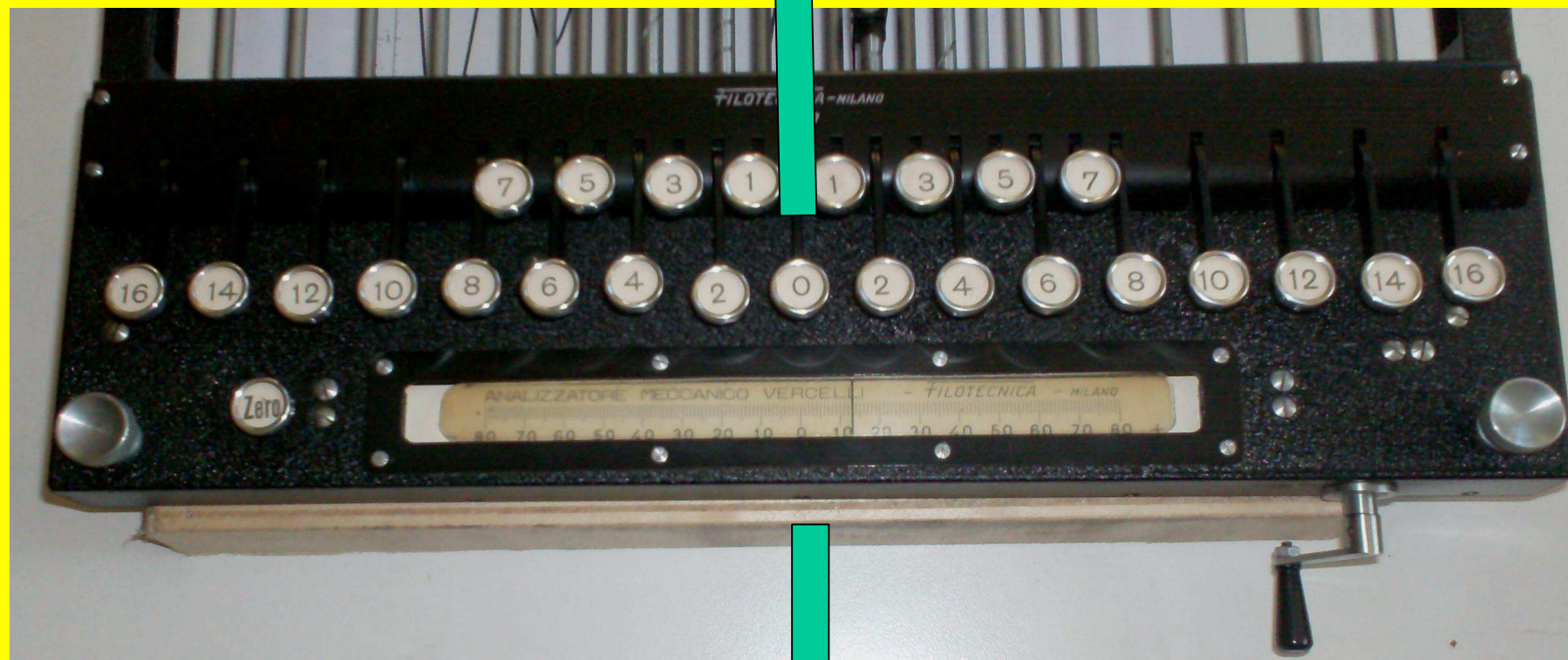


Lettura del valore del risultato della combinazione sulla scala graduata  
( da  $-80$  a  $80$  mm )



Questo valore rappresenta l'ordinata della curva selezionata,  
in corrispondenza dell'ordinata di volta in volta considerata,  
contrassegnata dal tasto 0 dello strumento

TASTO CENTRALE



SCALA GRADUATA

# Avvertenze nell'uso dell'analizzatore

- Scala dei grafici analizzati:
  - ✓ 12 cm di altezza massima;
  - ✓ 1 cm di distanza tra le ascisse.
- L'analizzatore è funzionante, ma risulta privo delle rotaie lungo le quali lo strumento dovrebbe scorrere, e sulle quali si colloca il diagramma da analizzare.

## CONFRONTO TRA ANALISI DI FOURIER E ANALISI PERIODALE

- Periodi arbitrariamente imposti
- Significato puramente matematico
- Applicata a curve periodiche ( con generalizzazioni )
- Nessuna distorsione degli elementi componenti
- Significato fisico di ciascuna componente
- Applicata a curve apparentemente non periodiche

# Estrapolazioni e previsioni

La curva consta di ...

Sintesi degli elementi componenti

Soli elementi periodici  
oscillanti intorno ad un asse  
medio



Si riproduce identicamente la  
curva

Elementi di ampiezza variabile



Accordo approssimato

Elementi periodici su substrato  
irregolare



Notevoli scarti tra dati  
sperimentali e sintesi

Nei primi due casi, esiste la possibilità di effettuare estrapolazioni



## PREVISIONI

**PRESUPPOSTO:** se un fenomeno si svolge con una data legge sino ad un certo istante, è logico ammettere che oltre tale punto il fenomeno sia rappresentato dal prolungamento della curva stessa.

In questo senso, la previsione si riduce ad una estrapolazione

La previsione si verificherà “esattamente” se si tratta di leggi permanenti; avrà validità aleatoria se la legge implica eventuali ignote variazioni nel tempo



È la statistica dei fenomeni a darci criteri sulla persistenza delle oscillazioni e sul modo di variazione

Per questo, le estrapolazioni vanno limitate a intervalli di tempo per cui si presume valgano le forme di variazione già manifestate



In generale, le onde di lungo periodo consentono estrapolazioni per intervalli maggiori di quelle di breve periodo.

È necessario considerare:

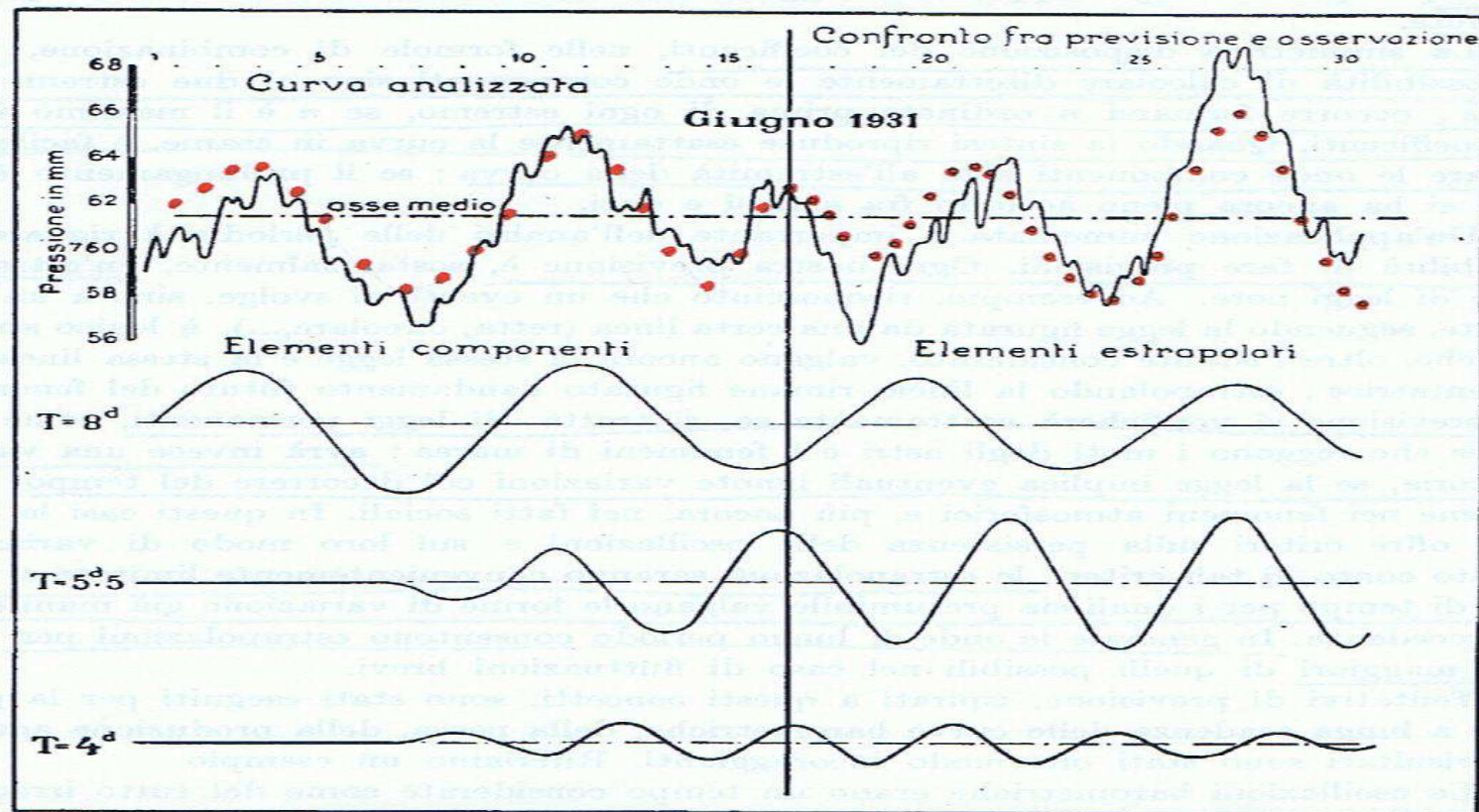
- Smorzamento degli elementi variabili;
- Presenza di impulsi discontinui o intermittenti.

In particolare, questo metodo fu utile soprattutto nello studio delle curve barometriche.

# Previsione di barogrammi

- Presa dati;
- Analisi periodale;
- Determinazione delle onde componenti;
- Prolungamento e sintesi delle onde componenti;
- Estrapolazione;
- Verifica a posteriori.





INCERTEZZA:  $\Delta p = 1 \text{ mmHg}$

La sintesi delle onde componenti e dell'asse medio riproduce abbastanza fedelmente la curva originale.

Per un intervallo di circa 10 giorni le fluttuazioni barometriche misurate presentano analogia completa con quelle previste.



# Conclusioni

Questo modello di previsione, pur apprezzabile, non è compatibile con il dissolvimento e la generazione di nuove onde componenti quasi-periodiche



Ciò inficia la validità nel tempo del metodo

Resta, però, importante il fondato tentativo operato da Francesco Vercelli di risolvere problemi quali lo studio di curve oscillanti e la predicibilità mediante l'ideazione di calcolatori